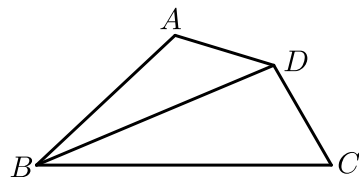


第2讲截长补短(加油站)

一、截长法

练习1

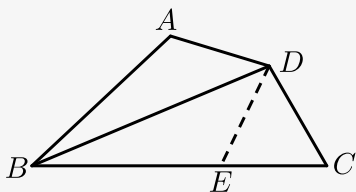
1. 如图, BD 平分 $\angle ABC$, $\angle A = 120^\circ$, $\angle C = 60^\circ$, 则 BC 的长度与 $AB + CD$ 的关系是 ().



- A. $BC = AB + CD$ B. $BC > AB + CD$ C. $BC < AB + CD$ D. 无法确定

【答案】A

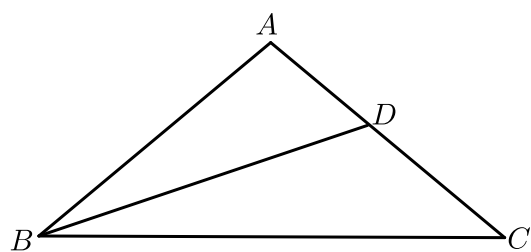
【解析】在 BC 上截取 $BE = BA$, 连接 DE .



$\because BD$ 平分 $\angle ABC$,
 $\therefore \angle ABD = \angle EBD$,
 $\therefore \triangle ABD \cong \triangle EBD (\text{SAS})$,
 $\therefore \angle A = \angle BED = 120^\circ$,
 $\therefore \angle CED = 60^\circ$,
 $\because \angle C = 60^\circ$,
 $\therefore \angle C = \angle CED = \angle CDE = 60^\circ$,
 $\therefore CE = CD$,
 $\therefore BC = BE + CE = AB + CD$.
故选A.

【标注】【知识点】角分线有关的辅助线

2. 如图, 等腰 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle ABC$ 的角平分线交 AC 于 D .



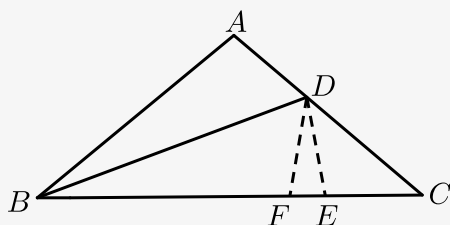
(1) 若 $\angle A = 100^\circ$, 求证 : $AD + BD = BC$.

(2) 若 $\angle A = 108^\circ$, 求证 : $AB + CD = BC$.

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) 证明见解析 .

【解析】 (1) 在 BC 上取点 E 、 F , 使得 $BE = BD$, $BF = BA$,



$$\because AB = AC, \angle A = 100^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle C = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle DBE = 20^\circ,$$

$$\because BD = BE,$$

$$\therefore \angle BED = \angle BDE = 80^\circ,$$

$$\therefore \angle EDC = 40^\circ = \angle C,$$

$$\therefore ED = EC,$$

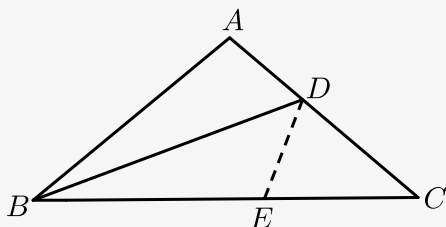
在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle FBD$ 中

$$\begin{cases} BA = BF \\ \angle ABD = \angle FBD, \\ BD = BD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle FBD,$$

$$\begin{aligned}
&\therefore AD = FD, \\
&\angle BFD = \angle A = 100^\circ, \\
&\therefore \angle DFE = 80^\circ = \angle DEF, \\
&\therefore DE = DF, \\
&\therefore AD = DF = DE = CE, \\
&\therefore AD + BD = CE + BE = BC.
\end{aligned}$$

(2) 如图所示, 在 BC 上截取, $BE = BA$, 连接 DE .



$$\begin{aligned}
&\because BD \text{ 平分 } \angle ABC, \\
&\therefore \angle ABD = \angle EBD. \\
&\text{在 } \triangle ABD \text{ 和 } \triangle EBD \text{ 中,} \\
&\quad \begin{cases} AB = BE \\ \angle ABD = \angle EBD \\ BD = BD \end{cases} \\
&\therefore \triangle ABD \cong \triangle EBD. \\
&\therefore \angle BED = \angle A = 108^\circ. \\
&\therefore \angle DEC = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ. \\
&\because AB = AC, \\
&\therefore \angle C = \frac{1}{2} \times (180^\circ - \angle A) = 36^\circ, \\
&\angle EDC = 180^\circ - 36^\circ - 72^\circ = 72^\circ, \\
&\therefore \angle EDC = \angle DEC = 72^\circ. \\
&\therefore DC = EC. \\
&\therefore DC + AB = BC.
\end{aligned}$$

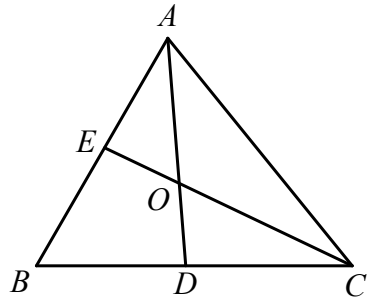
【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】SAS

【知识点】全等三角形的对应边与角

【知识点】截长补短

3. 如图所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 60^\circ$, $\triangle ABC$ 的角平分线 AD 和 CE 相交于点 O , $AE = 3$, $CD = 4$, 求 $AC =$ _____.



【答案】 7

【解析】 在AC上截取 $CF = CD$ ，连接 OF ，

由已知在 $\triangle COD$ 和 $\triangle COF$ 中

$$\begin{cases} CF = CD \\ \angle ACE = \angle BCE \\ OC = OC \end{cases}$$

$\triangle COD \cong \triangle COF$ (SAS) ,

$\angle COD = \angle COF = \angle AOE$,

$$\angle COA = 180^\circ - \frac{\angle BCA + \angle BAC}{2} = 180^\circ - \frac{(180^\circ - 60^\circ)}{2} = 120^\circ ,$$

$\therefore \angle COD = \angle COF = \angle AOE = 60^\circ$.

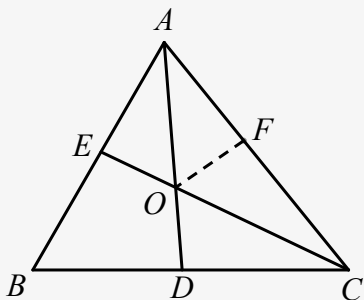
$\therefore \angle AOF = 60^\circ$,

$\therefore \triangle AOF \cong \triangle AOE$ (ASA) ,

$AF = AE$,

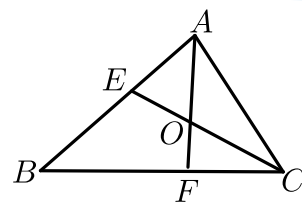
$\therefore CD + AE = CF + AF = AC = 7$.

故答案为：7 .



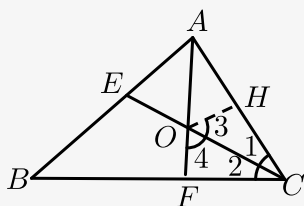
【标注】 【知识点】 多解或多种判定混合

4. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 60^\circ$ ， CE 、 AF 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，交于点 O . 求证：
 $AC = AE + CF$.



【答案】 证明见解析 .

【解析】 如图, 在 AC 上取一点 H , 使 $AH = AE$,



$\because AF$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, $\therefore \angle EAO = \angle HAO$,

在 $\triangle AEO$ 和 $\triangle AHO$ 中, $\begin{cases} AH = AE \\ \angle EAO = \angle HAO \\ AO = AO \end{cases}$

$\therefore \triangle AEO \cong \triangle AHO$ (SAS), $\therefore \angle AEO = \angle AHO$,

$\because CE$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, $\therefore \angle 1 = \angle 2$,

$\because \angle 1 + \angle 3 = \angle AHO$, $\angle 2 + \angle B = \angle AEO$, $\therefore \angle 3 = \angle B = 60^\circ$,

又 $\because \angle B = 60^\circ$, CE 、 AF 是 $\triangle ABC$ 的角平分线,

$\therefore \angle 4 = \angle 1 + \angle CAF = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle B) = \frac{1}{2}(180^\circ - 60^\circ) = 60^\circ$,

$\therefore \angle 3 = \angle 4$,

在 $\triangle CFO$ 和 $\triangle CHO$ 中, $\begin{cases} \angle 1 = \angle 2 \\ CO = CO \\ \angle 3 = \angle 4 \end{cases}$

$\therefore \triangle CFO \cong \triangle CHO$ (ASA),

$\therefore CF = CH$,

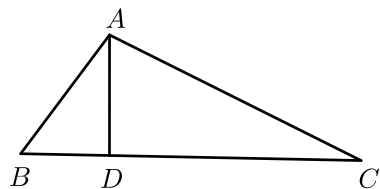
由图可知, $AC = AH + CH$,

$\therefore AC = AE + CF$.

【标注】 【知识点】角分线有关的辅助线

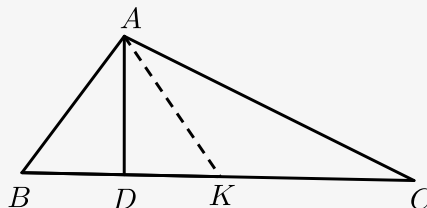
练习2

5. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AD \perp BC$ ，垂足为 D ， $AB + BD = DC$ ，求证： $\angle B = 2\angle C$ 。



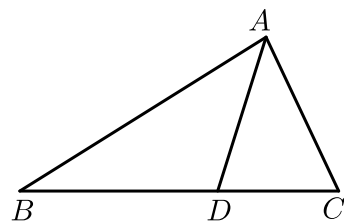
【答案】证明见解析。

【解析】截 $DK = BD$ ， $\triangle ABD \cong \triangle AKD$ (SAS)，
 $\therefore CK = CD - DK = CD - BD = AB$ ， $\because AB = AK$ ， $\therefore CK = AK$ ，
 $\therefore \angle C = \angle CAK$ ， $\therefore \angle AKB = 2\angle C$ ， $\therefore \angle B = 2\angle C$ 。



【标注】【知识点】截长补短

6. 如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC$ 的角平分线交 BC 于 D ， $AB = AC + CD$ ， $\angle B = 40^\circ$ ， $\angle C = \underline{\quad}^\circ$ 。



【答案】80

【解析】在 AB 上截取 $AE = AC$ ，连接 DE 。

$$\because AE = AC, \angle BAD = \angle CAD, AD = AD$$

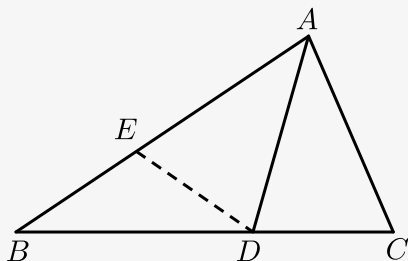
$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle AED$$

$$\therefore \angle C = \angle AED, CD = DE$$

$$\because AB = AC + CD, AE = AC$$

$$\therefore CD = BE = DE$$

$$\therefore \angle EBD = \angle EDB = 40^\circ, \angle C = \angle AED = 80^\circ$$



【标注】【知识点】角分线性质定理

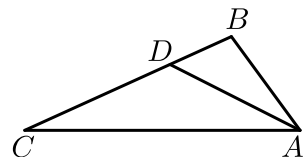
7. 在 $\triangle ABC$ 中， AD 平分 $\angle BAC$ ， $\angle B = 2\angle ADB$ ， $AB = 3$ ， $CD = 6$ ，则 $AC = (\quad)$ 。

A. $6\sqrt{2}$

B. $6 + 2\sqrt{3}$

C. 8.5

D. 9



【答案】D

【解析】如图，在 AC 上截取 $AB' = AB$ ，

可证得 $\triangle ABD \cong \triangle AB'D$ ，

设 $\angle ADB = x$ ，则

$$\angle B = 2\angle ADB = 2x,$$

$$\angle ADB' = \angle ADB = x,$$

$$\angle DB'A = \angle B = 2x,$$

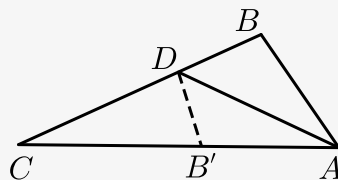
$$\therefore \angle CDB' = 180^\circ - 2x, \angle CB'D = 180^\circ - 2x,$$

$$\therefore \angle CB'D = \angle CDB',$$

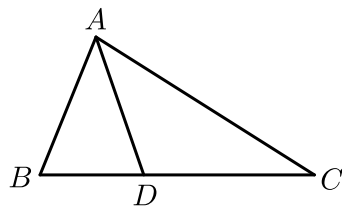
$$\therefore CB' = CD = 6,$$

$$\text{又 } AB' = AB = 3,$$

$$\therefore AC = CB' + AB' = 6 + 3 = 9.$$

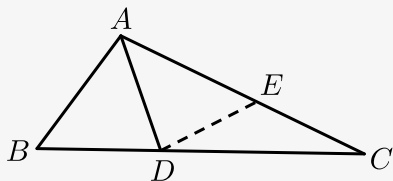


8. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 2\angle C$ ， AD 为 $\angle BAC$ 的平分线．求证： $AC = AB + BD$ ．



【答案】证明见解析．

【解析】方法一：如图，在 AC 上截取 $AE = AB$ ，连接 DE ，



可证 $\triangle ABD \cong \triangle AED$ (SAS)，

因此可得 $AB = AE$ ， $BD = DE$ ， $\angle B = \angle AED$ ，

$$\therefore \angle B = 2\angle C,$$

$$\therefore \angle AED = 2\angle C,$$

$$\therefore \angle CDE = \angle C,$$

$$\therefore DE = EC,$$

$$\therefore BD = EC,$$

$$\therefore AC = AB + BD.$$

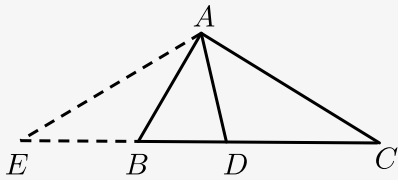
方法二：如图，延长 CB 到 E ，使得 $EB = AB$ ，则 $2\angle E = \angle ABC = 2\angle C$ ，

可得 $\angle E = \angle C$ ，从而 $\triangle ACE$ 是等腰三角形，

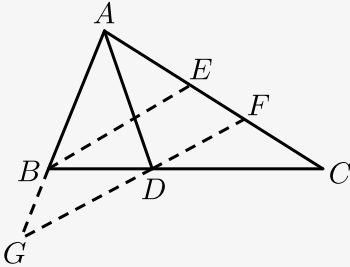
又由 AD 为 $\angle BAC$ 的平分线，即 $\angle BAD = \angle CAD$ ，

$$\angle EAD = \angle EAB + \angle BAD = \angle E + \angle CAD = \angle C + \angle CAD = \angle EDA,$$

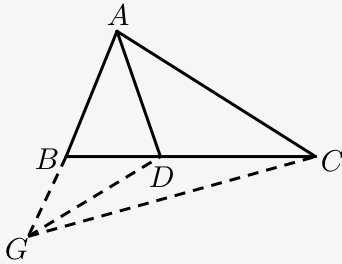
进而 $AE = DE$ ，故 $AC = AE = ED = AB + BD$ ，证毕．



方法三：如图，作 $\angle ABC$ 的平分线交 AC 于点 E ，过 D 作 BE 的平行线，交 AC 于点 F ，交 AB 的延长线于 G 。



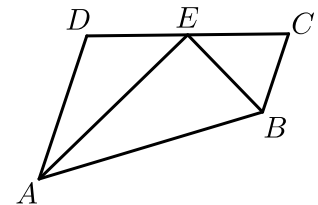
方法四：如图，延长 AB 至 G ，使 $BG = BD$ ，连接 CG ， DG 。



【标注】【知识点】截长补短

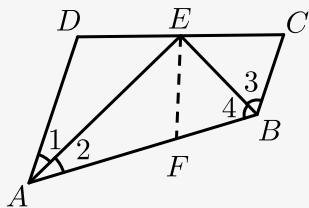
练习3

9. 如图，已知 $AD \parallel BC$ ， AE ， BE 分别平分 $\angle DAB$ 和 $\angle CBA$ ， CD 过点 E 。若 $AD = 3$ ， $BC = 2$ ，则 AB 的长为 _____。



【答案】5

【解析】如图，在 AB 上截取 AF ，使 $AF = AD$ ，连接 EF ，



$\because AE$ 平分 $\angle DAB$,

$\therefore \angle 1 = \angle 2$,

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle AFE$ 中,

$$\begin{cases} AD = AF \\ \angle 1 = \angle 2 \\ AE = AE \end{cases},$$

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle AFE$ (SAS),

$\therefore \angle D = \angle AFE$,

$\because AD \parallel BC$,

$\therefore \angle D + \angle C = 180^\circ$,

$\because \angle AFE + \angle BFE = 180^\circ$,

$\therefore \angle BFE = \angle C$,

$\because BE$ 平分 $\angle ABC$,

$\therefore \angle 3 = \angle 4$,

在 $\triangle BFE$ 和 $\triangle BCE$ 中,

$$\begin{cases} \angle BFE = \angle C \\ \angle 4 = \angle 3 \\ BE = BE \end{cases},$$

$\therefore \triangle BFE \cong \triangle BCE$ (AAS),

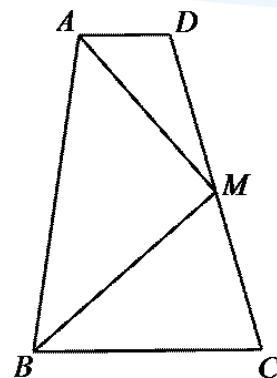
$\therefore BF = BC$,

$\because AB = AF + BF$,

$\therefore AB = AD + BC = 3 + 2 = 5$.

【标注】【知识点】截长补短

10. 已知：如图，梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， M 为 CD 中点， AM 平分 $\angle DAB$ ， $AD + BC = AB$ 。
求证： BM 平分 $\angle ABC$ 。



【答案】 证明见解析 .

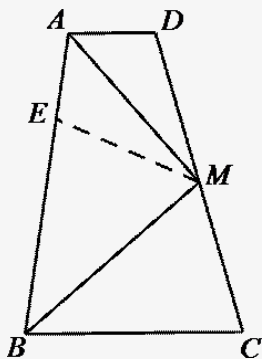
【解析】 方法一：在 AB 上截取 $AE = AD$ ，连接 ME .

易证 $\triangle ADM \cong \triangle AEM$ (SAS)，则 $DM = EM$ ；

又 M 为 CD 中点，故 $CM = DM = EM$ ；

又 $AD + BC = AB$ ，得 $BE = BC$ ；

故证得 $\triangle BEM \cong \triangle BCM$ (SSS)，因此 $\angle EBM = \angle CBM$ ， BM 平分 $\angle ABC$.



方法二：延长 AM 至 A' ，使得 $A'M = AM$ ，连接 $A'C$.

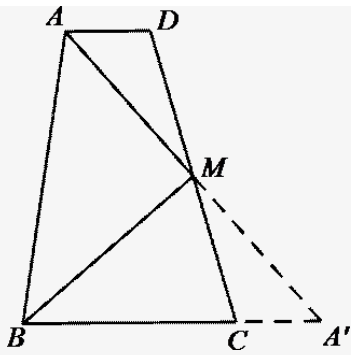
易证 $\triangle ADM \cong \triangle A'CM$ (SAS)，故 $AD = A'C$ ， $\angle D = \angle A'CM$

又 $AD \parallel BC$ ，故 $\angle D + \angle BCD = 180^\circ$ ，故 $\angle A'CM + \angle BCD = 180^\circ$ ，

即 $\angle BCA' = 180^\circ$ ，因此 B, C, A' 三点共线 .

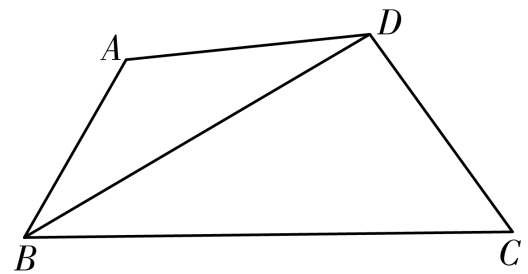
又 $AD + BC = AB$ ，故可证 $AB = A'B$.

故 $\triangle ABM \cong \triangle A'BM$ (SSS)，因此 $\angle ABM = \angle A'BM$ ，即 BM 平分 $\angle ABC$ ，得证 .



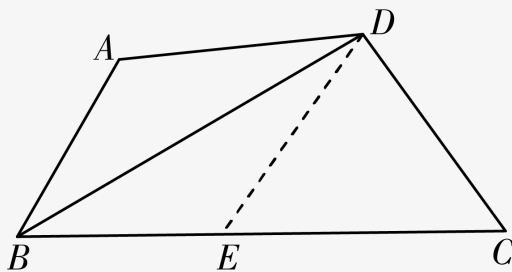
【标注】【知识点】利用平行线+中点构造全等

11. 已知，如图，四边形 $ABCD$ 中， $BC > AB$ ， $AD = CD$ ， BD 平分 $\angle ABC$ ，求证：
 $\angle A + \angle C = 180^\circ$.



【答案】见解析

【解析】证明：如图，在 BC 上截取 $BE = BA$ ，连接 DE ，

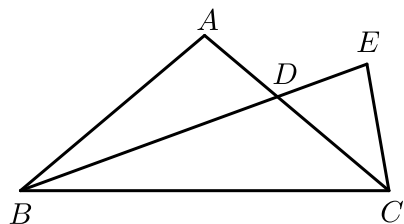


$\because BD$ 平分 $\angle ABC$ ，
 $\therefore \angle ABD = \angle EBD$ ，
 在 $\triangle BAD$ 和 $\triangle BED$ 中，

$$\begin{aligned}
&\therefore \begin{cases} BA = BE \\ \angle ABD = \angle EBD, \\ BD = BD \end{cases} \\
&\therefore \triangle BAD \cong \triangle BED (\text{SAS}), \\
&\therefore DA = DE, \angle A = \angle BED. \\
&\therefore DC = AD, \\
&\therefore DE = DC, \\
&\therefore \angle C = \angle DEC. \\
&\text{又} \because \angle BED + \angle DEC = 180^\circ, \\
&\therefore \angle A + \angle C = 180^\circ.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】截长补短

12. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 100^\circ$ ， $\angle ABC = 40^\circ$ ， BD 是 $\angle ABC$ 的角平分线，延长 BD 至 E ，使 $DE = AD$ ，连接 EC 。求证： $BC = AB + CE$ 。



【答案】证明见解析。

【解析】证明：在 BC 上截取 $BF = BA$ ，连接 DF ，

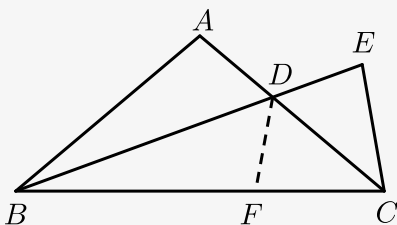
$$\because \angle A = 100^\circ, \angle ABC = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB = 40^\circ,$$

$\because BD$ 是 $\angle ABC$ 的
角平分线，

$\therefore$

$$\angle ABD = \angle FBD = 20^\circ,$$

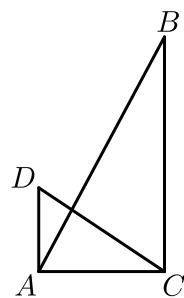


$\because BD = BD, BA = BF,$
 $\therefore \triangle ABD \cong \triangle FBD \text{ (SAS)},$
 $\therefore AD = FD, \angle ADB = \angle FDB,$
 $\because \angle A = 100^\circ, \angle ABD = 20^\circ,$
 $\therefore \angle ADB = \angle FDB = 60^\circ,$
 $\therefore \angle FDC = 60^\circ,$
 $\therefore \angle CDE = 60^\circ,$
 $\therefore \angle FDC = \angle EDC,$
 $\therefore DE = AD,$
 $\therefore DE = DF,$
 $\text{又} \because DC = DC,$
 $\therefore \triangle CDF \cong \triangle CDE \text{ (SAS)},$
 $\therefore CE = CF,$
 $\therefore BC = BF + FC = AB + CE.$

【标注】【知识点】截长补短

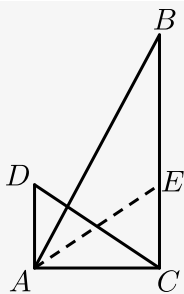
练习4

13. 如图，已知 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADC$ 中， $\angle ACB = \angle CAD = 90^\circ$ ， $\angle D = 2\angle B$ ， $AD = 5$ ， $BC = 15$ ，则 $CD = \underline{\quad\quad}$ 。



【答案】10

【解析】如图，在 BC 上截取 BE ，使 $CE = AD$ ，



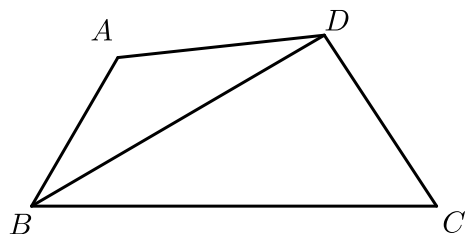
$\therefore$ 在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle CEA$ 中 ,

$$\begin{cases} AC = CA \\ \angle DAC = \angle ACB = 90^\circ , \\ AD = CE \end{cases}$$

 $\therefore \triangle ADC \cong \triangle CEA$,
 $\therefore EC = AD = 5$, $\angle AEC = \angle D$,
 $\therefore AD \parallel BC$,
 $\therefore \angle D = \angle DCB$,
 $\therefore \angle D = 2\angle B$,
 $\therefore \angle AEC = \angle D = 2\angle B$,
 $\therefore \angle AEC = \angle B + \angle BAE$,
 $\therefore 2\angle B = \angle AEC = \angle B + \angle BAE$,
 $\therefore \angle B = \angle BAE$,
 则 $BE = AE$,
 $\therefore BC = 15$, $EC = 5$,
 $\therefore AE = BE = BC - EC = 10$,
 $\therefore \triangle ADC \cong \triangle CEA$,
 $\therefore CD = AE = 10$.
 故答案为 10 .

【标注】【知识点】截长补短

14. 已知：如图， $BC > AB$ ， $\angle A + \angle C = 180^\circ$ ， BD 平分 $\angle ABC$. 求证： $DC = AD$.



【答案】证明见解析 .

【解析】在 BC 上截取 $BE = BA$, 连接 DE ,

$\therefore BD$ 平分 $\angle ABC$,

$\therefore \angle ABD = \angle EBD$,

在 $\triangle BAD$ 和 $\triangle BED$ 中 ,
$$\begin{cases} BA = BE \\ \angle ABD = \angle EBD \\ BD = BD \end{cases}$$

$\therefore \triangle BAD \cong \triangle BED$ (SAS) ,

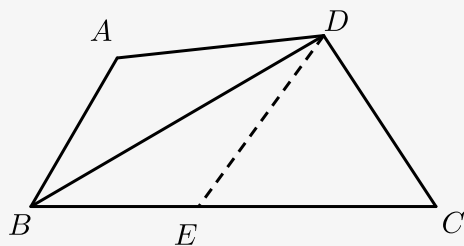
$\therefore DA = DE$, $\angle A = \angle BED$,

$\therefore \angle BED + \angle DEC = 180^\circ$, $\angle A + \angle C = 180^\circ$,

$\therefore \angle C = \angle DEC$,

$\therefore DE = DC$,

$\therefore DC = AD$.

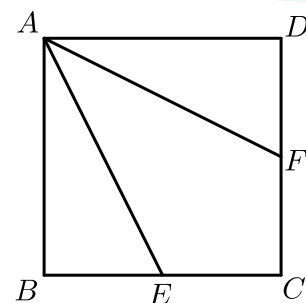


【标注】【知识点】截长补短

二、补短法

练习5

15. 已知 : 如图 , $ABCD$ 是正方形 , $\angle FAD = \angle FAE$. 求证 : $BE + DF = AE$.



【答案】证明见解析 .

【解析】方法一：延长CB至M，使得 $BM = DF$ ，连接AM .

$\because AB = AD, AD \perp CD, AB \perp BM, BM = DF,$

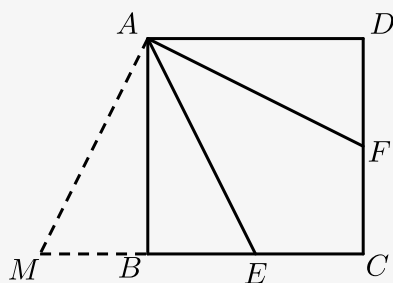
$\therefore \triangle ABM \cong \triangle ADF, \therefore \angle AFD = \angle AMB, \angle DAF = \angle BAM,$

$\because AB \parallel CD, \therefore$

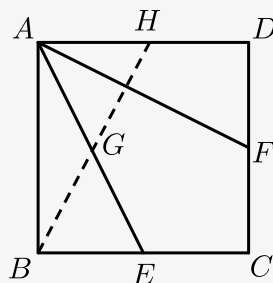
$\angle AFD = \angle BAF = \angle EAF + \angle BAE = \angle BAE + \angle BAM = \angle EAM,$

$\therefore \angle AMB = \angle EAM,$

$\therefore AE = EM = BE + BM = BE + DF.$



方法二：如图，在EA上截取 $EG = EB$ ，延长BG交AD于点H .

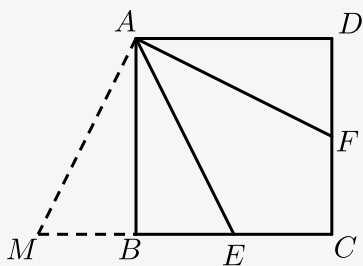


$\because AD \parallel BE, \therefore \angle AHG = \angle EBG = \angle EGB = \angle AGH, \therefore AG = AH.$

又 $\angle FAD = \angle FAE, \therefore AF \perp GH$ ，可证 $\triangle BAH \cong \triangle ADF.$

$\therefore AH = DF = AG$, $\therefore BE + DF = AE$.

方法三：如图，延长CB至M，使得EM = EA，连接AM。



$\therefore \angle M = \angle EAM = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle AEM$, 又 $\angle AEM = \angle EAD$, $\angle FAD = \angle FAE$,

$\therefore \angle M = 90^\circ - \angle DAF = 90^\circ - \angle BAM$, $\therefore \angle MAB = \angle FAD$.

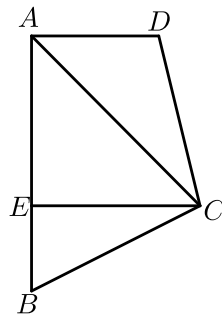
又 $AB = AD$, $\angle MBA = \angle FDA$, $\therefore \triangle MBA \cong \triangle FDA$.

$\therefore BM = DF$, $\therefore BE + DF = AE$.

【标注】【知识点】正方形的性质

【能力】推理论证能力

16. 如图，AC平分 $\angle BAD$ ， $CE \perp AB$ ，且 $\angle B + \angle D = 180^\circ$ ，求证： $AE = AD + BE$ 。



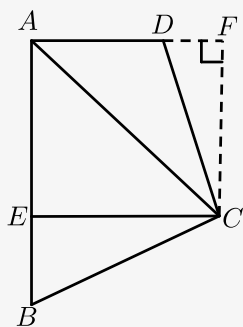
【答案】证明见解析。

【解析】过C作AD的垂线交AD延长线于F，

$\triangle BCE \cong \triangle DCF \Rightarrow BE = DF$.

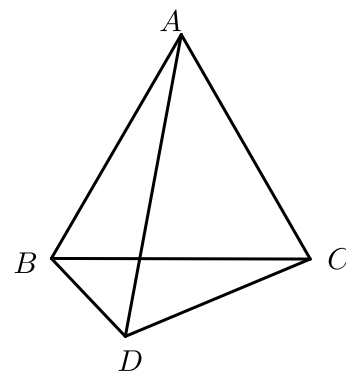
$\triangle EAC \cong \triangle FAC \Rightarrow AE = AF$,

$\therefore AE = AD + DF = AD + BE$.



【标注】【知识点】截长补短

17. 如图， $\triangle ABC$ 为等边三角形， $\angle ADC = 60^\circ$ 。求证： $AD = BD + CD$ 。



【答案】证明见解析。

【解析】如图所示，延长DC至E，使得DE = AD，连接AE，

$\because \angle ADC = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle ADE$ 为等边

三角形，

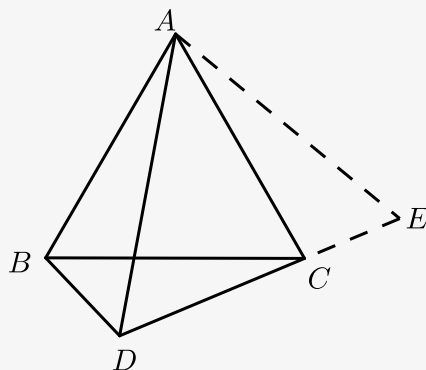
易证 $\triangle ADB \cong$

$\triangle AEC$ (SAS)，

$\therefore BD = CE$ ，

$\therefore$

$AD = DE = CD + CE$ ，



$$\therefore AD = CD + BD.$$

【标注】【知识点】SAS

18. 在四边形 $ABCD$ 中， $\angle ABC$ 是钝角， $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$ ，对角线 AC 平分 $\angle BAD$ 。

(1) 如图1，若 $AB + AD = AC$ ，求 $\angle BCD$ 的度数。

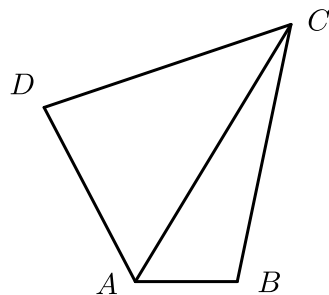


图1

(2) 如图2，当 $\angle BAD = 120^\circ$ 时，请判断 AB 、 AD 与 AC 之间的数量关系？并加以证明。

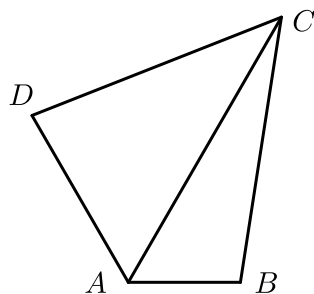


图2

【答案】(1) $\angle BCD = 60^\circ$ 。

(2) $AC = AD + AB$ ，证明见解析。

【解析】(1) 如图1，延长 AB 到 E ，使 $BE = AD$ 。

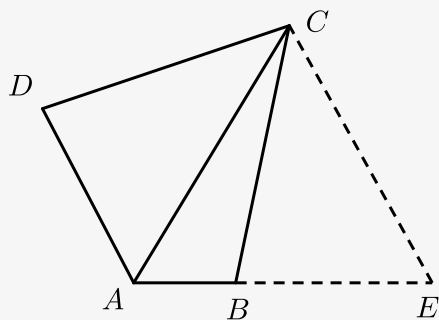


图1

$$\because AB + AD = AC,$$

$$\therefore AE = AC.$$

由(1)知 $\angle ADC = \angle EBC$, 在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle EBC$ 中,

$$\begin{cases} DC = BC \\ \angle ADC = \angle EBC, \\ AD = BE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADC \cong \triangle EBC, \text{ 故 } AC = EC.$$

$$\text{又 } \because AE = AC,$$

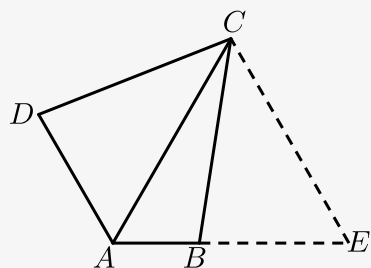
$$\therefore AE = AC = EC,$$

故 $\triangle AEC$ 为等边三角形, $\angle CAB = 60^\circ$,

$$\therefore \angle BAD = 120^\circ, \angle BCD = 360^\circ - 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ,$$

$$\text{即 } \angle BCD = 60^\circ.$$

(2) 延长 AB 至点 E , 使 $AE = AC$,



$$\because \angle BAD = 120^\circ, AC \text{ 平分 } \angle BAD,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle BAC = 60^\circ,$$

$$\because AE = AC,$$

$$\therefore \triangle ACE \text{ 为等边三角形},$$

$$\therefore AC = AE = CE, \angle ACE = \angle E = 60^\circ,$$

$$\because \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ, \angle DAB = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle DCB = 60^\circ,$$

$$\because \angle DCA + \angle ACB = \angle ACB + \angle BCE,$$

$$\therefore \angle DCA = \angle BCE,$$

在 $\triangle DCA$ 和 $\triangle DCA$ 中,

$$\begin{cases} \angle DCA = \angle BCE \\ CA = CE \\ \angle CAD = \angle CEB \end{cases},$$

$$\therefore \triangle DCA \cong \triangle BCE \text{ (ASA)},$$

$$\therefore AD = BE,$$

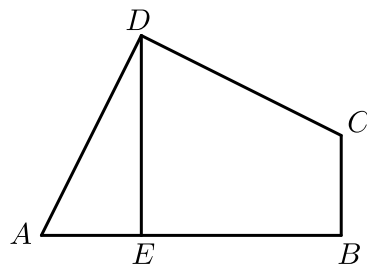
$$\therefore AE = AB + BE,$$

$$\therefore AC = AB + AD.$$

【标注】【题型】题型：角分线性质的应用

练习6

19. 如图，四边形 $ABCD$ 中， $AD = DC$ ， $\angle ADC = \angle ABC = 90^\circ$ ， $DE \perp AB$ ，若四边形 $ABCD$ 面积为16，则 DE 的长为（ ）。



A. 3

B. 2

C. 4

D. 8

【答案】C

【解析】过点 D 作 BC 的垂线，交 BC 的延长线于 F ，

$$\because \angle ADC = \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A + \angle BCD = 180^\circ,$$

$$\because \angle FCD + \angle BCD = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle FCD,$$

$$\text{又 } \angle AED = \angle F = 90^\circ, AD = DC,$$

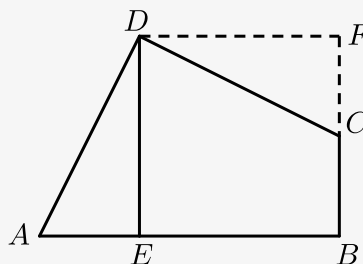
$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CDF,$$

$$\therefore DE = DF,$$

$$S_{ABCD} = S_{DEBF} = 16,$$

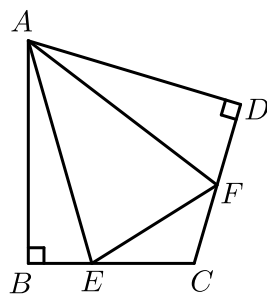
$$\therefore DE = 4,$$

故选C.



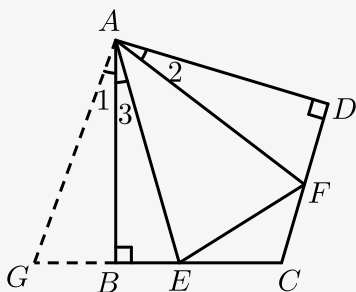
【标注】【知识点】截长补短

20. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AB = AD$ ， $\angle B = \angle D = 90^\circ$ ， E 、 F 分别是边 BC 、 CD 上的点，且 $\angle EAF = \frac{1}{2}\angle BAD$ ， $BE = 2$ ， $DF = 3$ ，求 EF 的值。



【答案】5.

【解析】延长 EB 到 G ，使 $BG = DF$ ，连接 AG ，



$$\because \angle ABG = \angle ABC = \angle D = 90^\circ, AB = AD,$$

$$\therefore \triangle ABG \cong \triangle ADF (\text{SAS}),$$

$$\therefore AG = AF, \angle 1 = \angle 2,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 3 = \angle EAF = \frac{1}{2}\angle BAD,$$

$$\therefore \angle GAE = \angle FAE, \text{ 又 } AE = AE,$$

$$\therefore \triangle AEG \cong \triangle AEF (\text{SAS}),$$

$$\therefore EG = EF,$$

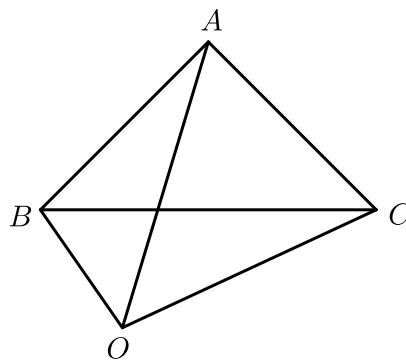
$$\therefore EG = BE + BG,$$

$$\therefore EF = BE + FD,$$

$$\therefore EF = 5.$$

【标注】【知识点】旋转型全等

21. 如图， $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形， $\angle AOC = 45^\circ$. 求证： $\angle AOB = 45^\circ$.



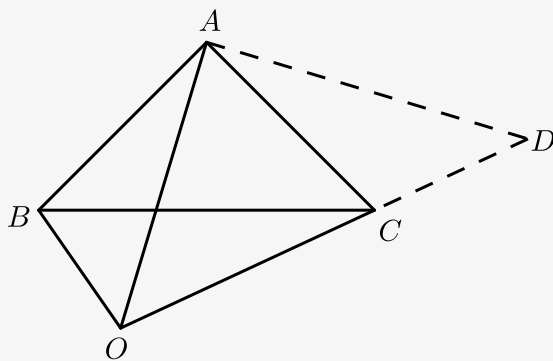
【答案】证明见解析 .

【解析】如图，过A作 $AD \perp AO$ 交OC延长线于D点，

$\because \angle AOC = 45^\circ$,

$\therefore \triangle AOD$ 为等腰
直角三角形，

$\therefore$



$\angle BAO + \angle CAO = 90^\circ$, $\angle CAD + \angle CAO = 90^\circ$,

$\therefore \angle BAO = \angle CAD$,

$\because AB = AC$, $AO = AD$,

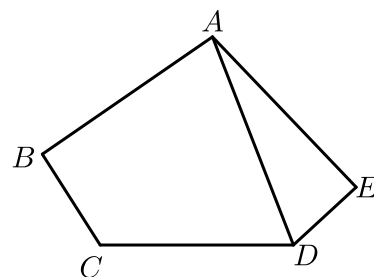
$\therefore \triangle ABO \cong \triangle ACD$ (SAS) ,

$\therefore \angle AOB = \angle ADC = 45^\circ$.

【标注】【知识点】 SAS

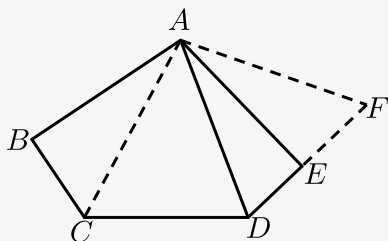
22.

五边形 $ABCDE$ 中, $AB = AE$, $BC + DE = CD$, $\angle ABC + \angle AED = 180^\circ$, 求证: AD 平分 $\angle CDE$.



【答案】 证明见解析.

【解析】 延长 DE 至 F , 使得 $EF = BC$, 连接 AC , AF ,



$$\because \angle ABC + \angle AED = 180^\circ, \angle AEF + \angle AED = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle AEF,$$

$$\because AB = AE, BC = EF,$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle AEF \text{ (SAS)},$$

$$\therefore AC = AF,$$

$$\because BC + DE = CD,$$

$$\therefore CD = DE + EF = DF,$$

$$\therefore \triangle ADC \cong \triangle ADF \text{ (SSS)},$$

$$\therefore \angle ADC = \angle ADF$$

即 AD 平分 $\angle CDE$.

【标注】 【知识点】截长补短